פתרון למבחן B (שנערך ב-29.9.2014)

1. חשבו את $\log_3\left(5\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)+2^{64}\right)$.

פתרון. נשים לב כי $3-2=1$ וכן $3+2=5$. לכן באמצעות שימוש חוזר של נוסחת כפל מקוצר $(a+b)(a-b)$ נרא כי

$$\begin{aligned}
&5\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)=\\
&=(3-2)(3+2)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)=\\
&=\left(3^2-2^2\right)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)=\ldots=\\
&=\left(3^{32}-2^{32}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)=3^{64}-2^{64}
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
&\log_3\left(5\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)+2^{64}\right)=\\
&\qquad=\log_3\left(3^{64}-2^{64}+2^{64}\right)=\log_3\left(3^{64}\right)=64
\end{aligned}$$

2. במתומן משוכלל ABCDEFGH, הוכיחו כי $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2=2\cdot\mathrm{AC}^2$.

פתרון. מכיוון שהמרובע משוכלל, ניתן להחליף צלע AB בכל צלע אחרת, למשל ב-AH. כמו כן, ניתן להחליף את AC בכל אלכסון אחר שמחבר שני קודקודים שסמוכים לקודקוד כלשהו, למשל BH או BD. לכן מספיק להראות כי

$$.\,\mathrm{HA}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{HB}^2+\mathrm{BD}^2$$

המתומן המשוכלל חסום במעגל, ש-HD הוא קוטר שלו. לכן הזוויות HAD ו-HBD ישרות, ולכן לפי משפט פיתגורס

$$.\,\mathrm{HA}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{HD}^2=\mathrm{HB}^2+\mathrm{BD}^2$$

3. הוכיחו כי לכל זווית חדה α, מתקיים: $2\sqrt{\sin\alpha}\le\cos\alpha+\tan\alpha$.

פתרון ראשון. לזווית חדה סינוס, קוסינוס וטנגנס חיוביים. נפעיל אי-שוויון הממוצעים על טנגנס וקוסינוס (ממוצע חשבוני גדול מממוצע הנדסי):

$$\sqrt{\sin\alpha}=\sqrt{\cos\alpha\cdot\tan\alpha}\le\frac{\cos\alpha+\tan\alpha}{2}$$

זה בעצם מש"ל.

פתרון שני. לזווית חדה סינוס, קוסינוס וטנגנס חיוביים, לכן שני האגפים באי-שוויון מוגדרים וחיוביים. לכן אפשר להעלות את שני האגפים בריבוע.

$$4\sin\alpha \le \left(\cos\alpha + \tan\alpha\right)^2$$

$$4\sin\alpha \le \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\tan\alpha + \tan^2\alpha$$

$$4\sin\alpha \le \cos^2\alpha + 2\sin\alpha + \tan^2\alpha$$

$$0 \le \cos^2\alpha - 2\sin\alpha + \tan^2\alpha$$

$$0 \le \left(\cos\alpha - \tan\alpha\right)^2$$

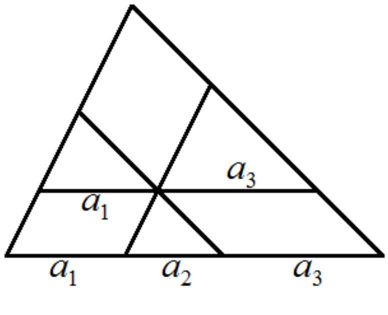
וזה ברור.

4. נתון משולש ששטחו S. דרך נקודה P בתוך המשולש מעבירים 3 ישרים, שמקבילים לצלעות המשולש. הישרים מחלקים את המשולש ל-6 חלקים: 3 מקביליות, ו-3 משולשים ששטחיהם S_1, S_2, S_3. הראו כי $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$.

פתרון. נסובב את הציור כך, שלמשולש תהיה צלע אופקית. צלעות אורך הצלע האופקי של במשולש המקורי יסומן a, וגובה לצלע זה יסומן h. אורכי הצלעות האופקיים במשולשים הקטנים שנוצרים יסומנו a_1, a_2, a_3, והגבהים לאותם הצלעות במשולשים מתאימים h_1, h_2, h_3.

נסמן את $\kappa = \dfrac{h}{a}$. מדמיון משולשים מקבל שגם $\dfrac{h_1}{a_1} = \dfrac{h_2}{a_2} = \dfrac{h_3}{a_3} = \kappa$. לכן מקבלים $S_i = \dfrac{a_i h_i}{2} = \dfrac{\kappa}{2} \cdot a_i^2$, כלומר $\sqrt{S_i} = \mu a_i$, כאשר $\mu = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}$. באופן דומה מקבלים נוסחה דומה למשולש הגדול: $\sqrt{S} = \mu a$, עם אותו ה-μ.

בציור יש מקביליות, ובמקביליות צלעות נגדיות שוות. מבין הצעות a_1, a_2, a_3 אחת כבר נמצאת על צלע a, ושתי צלעות אחרות ניתן להעביר לצלע a באמצעות המקביליות. נקבל שצלע a מורכבת מהקטעים באורכים a_1, a_2, a_3, לכן
$a = a_1 + a_2 + a_3$.



לכן גם $\mu a = \mu a_1 + \mu a_2 + \mu a_3$,

כלומר $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$. מש"ל.

5. עבור איזה x מתקיים $\frac{\log_4 17}{\log_9 17}=\frac{\log_4 17-\log_x 17}{\log_x 17-\log_9 17}$?

פתרון. נסמן $a=\log_4 17$, $b=\log_9 17$, $y=\log_x 17$.

אז המשוואה היא $\frac{a}{b}=\frac{a-y}{y-b}$ כלומר $a\left(y-b\right)=b\left(a-y\right)$ כלומר $ay+by=2ab$

במילים אחרות (עם מחלקים ב- aby את שני האגפים):

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{y}$$

זאת אומרת $\frac{1}{\log_4 17}+\frac{1}{\log_9 17}=\frac{2}{\log_x 17}$, כלומר

$$\log_{17} 4+\log_{17} 9=2\log_{17} x$$

$$\log_{17} 4\cdot 9=\log_{17} x^2$$

$$6^2=x^2$$

לכן $x=6$, הרי על מנת שהלוגריתמים יהיו מוגדרים, x חייב להיות חיובי.

6. הוכיחו כי אם α,β,γ הן זוויות של משולש, אז

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma .$$

פתרון. הנוסחה שקולה ל-

$$\tan\alpha+\tan\beta=\left(\tan\alpha\cdot\tan\beta-1\right)\cdot\tan\gamma$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-\tan\gamma$$

$$\tan\left(\alpha+\beta\right)=-\tan\gamma$$

אבל סכום הזוויות במשולש תמיד π , כלומר בעצם מבקשים להוכיח כי

$$\tan\left(\pi-\gamma\right)=\tan\left(-\gamma\right),$$

וזה נכון הרי טנגנס מחזורי עם מחזור π לפי הגדרתו.

7. הראו כי $2^{n+2}\ge n^3$ לכל n טבעי.

פתרון. ננסה להוכיח את זה באינדוקציה.

נניח שכבר הוכחנו עבור n שמתקיים $2^{n+2}\ge n^3$, ורוצים להוכיח כי $2^{n+3}\ge\left(n+1\right)^3$.

את הנדרש אפשר לקבל בתור מכפלה של הנחת האינדוקציה עם אי-השוויון:

$$2\ge\frac{\left(n+1\right)^3}{n^3} .$$

זה מתקיים בהנחה ש-$2n^3 \ge n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, כלומר $n^3 \ge 3n^2 + 3n + 1$, כלומר כאשר $\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n} \le 1$. כאשר $n \ge 4$ זה מתקיים, הרי

$$\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n} \le \frac{1}{64} + \frac{3}{16} + \frac{3}{4} < \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{4} = \frac{4}{16} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

לכן אם נוכיח את הטענה עבור $n = 4$, אז הטענה תתקבל באינדוקציה לכל $n > 4$.

עבור $n = 1, 2, 3, 4$ קל לבדוק את הטענה במפורש:

$$2^{1+2} = 8 > 1 = 1^3,$$
$$2^{2+2} = 16 > 8 = 2^3,$$
$$2^{3+2} = 32 > 27 = 3^3,$$
$$2^{4+2} = 64 = 4^3.$$

8. פתרו את המשוואה $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$.

פתרון ראשון. במילים אחרות $\cos 2x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, כלומר

$\pm 2x + 2\pi k = \frac{\pi}{2} - x$, כאשר k שלם.

זה נותן שתי אפשרויות או כאשר הסימן + אז $3x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k$, כלומר $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} m$ לכל m שלם (כאן החלפנו סימן למספר השלם), כלומר $\sin$ הוא $\frac{1}{2}$ או -1, או כאשר הסימן הוא $-$ אז $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$, שזה שוב המקרה כאשר $\sin$ הוא -1.

הכי פשוט להחסיר מ-m אחד, ולקבל תשובה בצורה $x = \frac{2\pi}{3} m - \frac{\pi}{2}$.

פתרון שני. נסמן $\sin x = s$, אז נתון כי $1 - s^2 - s^2 = s$, כלומר $2s^2 + s - 1 = 0$. קל לפתור את המשוואה הריבועית: $s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}, -1$. מכאן מקבלים אותה תשובה כמו בפתרון הראשון.

9. נניח כי $\{x^2\} = \{x\}^2$, כאשר $x > 100$ מספר ממשי, וסוגריים מסולסלות מסמנות חלק שברי של המספר. הוכיחו כי x מספר רציונאלי.

פתרון. ניתן לרשום $x = n + \{x\}$, כאשר n הוא מספר שלם. אז

$$\left\{n^2 + 2n\{x\} + \{x\}^2\right\} = \left\{\left(n + \{x\}\right)^2\right\} = \{x\}^2$$

לכן $2n\{x\} = m$ הוא מספר שלם. לכן $\{x\} = \frac{m}{2n}$ ולכן $x = n + \frac{m}{2n} = \frac{2n^2 + m}{2n}$.

כעת ברור ש-x מספר רציונלי, הרי הצגנו אותו בתור מנה של שני מספרים שלמים.